第 4 节 整体换元法的应用（★★★）

强化训练

类型Ⅰ：三角函数的基本性质

1.（2022·合肥二模·★★）将函数 $y=\sin x$ 的图象上各点横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $y=f(x)$ 的图象，当 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$ 时，$f(x)$ 的值域为（　　）

（A）$[-1,1]$　　（B）$[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$　　（C）$[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$　　（D）$[-\frac{1}{2},1]$

答案：C

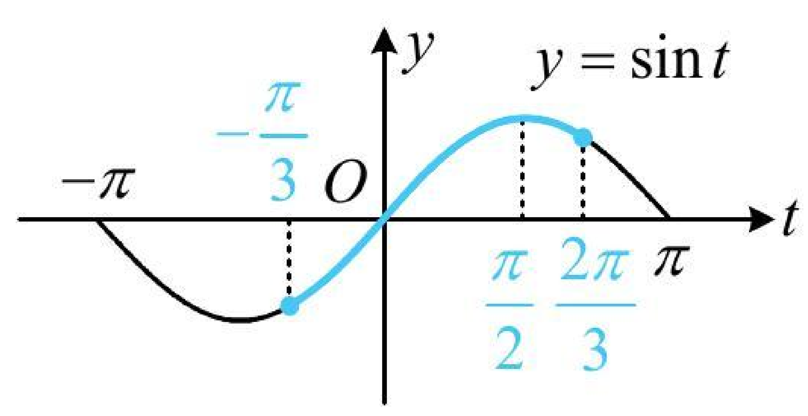
解析：将 $y=\sin x$ 横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，得到 $y=\sin 2x$，

再左移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到 $y=\sin 2(x+\frac{\pi}{6})=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

要求 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$ 上的值域，可将 $2x+\frac{\pi}{3}$ 换元成 t，借助 $y=\sin t$ 的图象来分析，

令 $t=2x+\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=\sin t$，当 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$ 时，$t\in[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$，函数 $y=\sin t$ 的部分图象如图所示，

由图可知，$f(x)_{\min}=\sin(-\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f(x)_{\max}=\sin\frac{\pi}{2}=1$，所以 $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$.



2.（★★）设 $f(x)=2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\cos^2 x+\sqrt{3}(x\in\mathbf{R})$，则不等式 $f(x)\ge 1$ 的解集为_____.

答案：$[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{7\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$

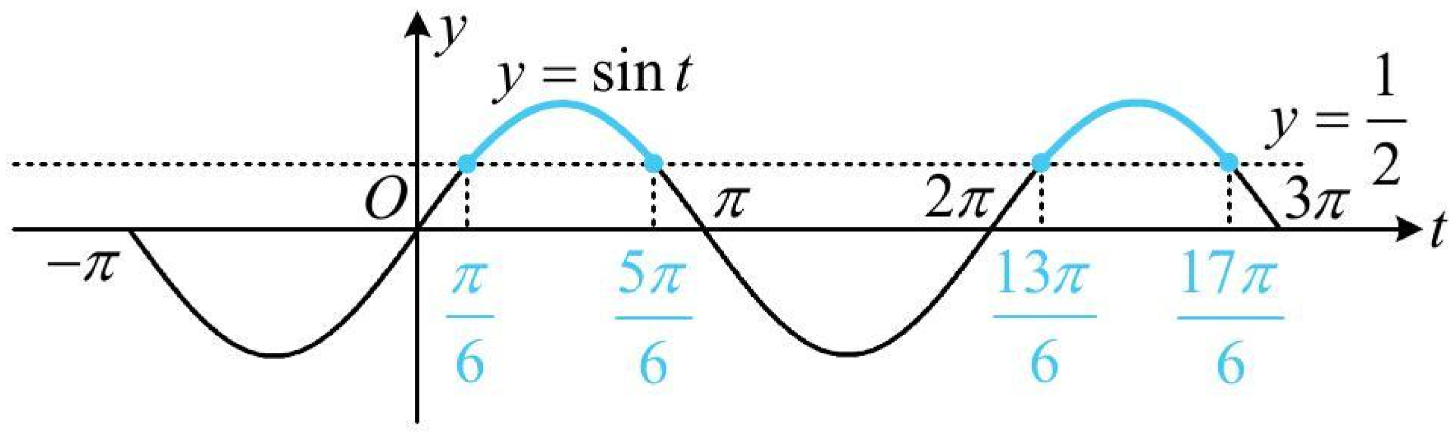
解析：先把 $f(x)$ 的解析式化简，$f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}(2\cos^2 x-1)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，

所以 $f(x)\ge 1\Leftrightarrow\sin(2x-\frac{\pi}{3})\ge\frac{1}{2}$，要解此不等式，可将 $2x-\frac{\pi}{3}$ 换元成 t，借助 $y=\sin t$ 的图象来分析，

设 $t=2x-\frac{\pi}{3}$，则 $\sin t\ge\frac{1}{2}$，如图，由图可知在 $[-\pi,\pi)$ 这个周期内，$\sin t\ge\frac{1}{2}$ 的解集为 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$，

所以不等式 $\sin t\ge\frac{1}{2}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解集为 $[2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}]$，从而 $2k\pi+\frac{\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，

故 $k\pi+\frac{\pi}{4}\le x\le k\pi+\frac{7\pi}{12}$，即原不等式的解集为 $[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{7\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$.



3.（2022•黄山模拟•★★）函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 在 $[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{4}]$ 上的单调递增区间是_____.

答案：$[\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}]$

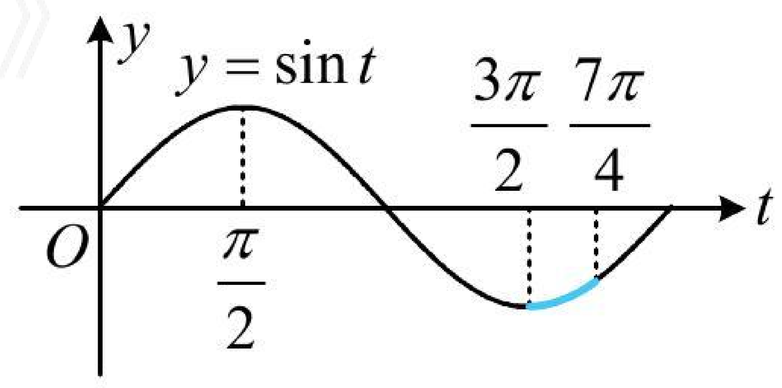
解析：先将 $2x+\frac{\pi}{4}$ 换元成 t，借助 $y=\sin t$ 的图象来分析单调性，

令 $t=2x+\frac{\pi}{4}$，则 $f(x)=\sin t$，当 $x\in[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{4}]$ 时，$t\in[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{4}]$，

要求 $f(x)$ 的增区间，只需寻找函数 $y=\sin t$ 在 $[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{4}]$ 上的增区间，

如图，由图可知，函数 $y=\sin t$ 在 $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 上↘，在 $[\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}]$ 上↗，

所以令 $\frac{3\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{7\pi}{4}$ 可得：$\frac{5\pi}{8}\le x\le\frac{3\pi}{4}$，故 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{4}]$ 上的单调递增区间是 $[\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}]$.



4.（2022•宝鸡模拟•★★）函数 $y=\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$ 的单调递减区间是（　　）

（A）$[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}](k\in\mathbf{Z})$

（B）$[2k\pi-\frac{\pi}{8},2k\pi+\frac{3\pi}{8}](k\in\mathbf{Z})$

（C）$[2k\pi+\frac{3\pi}{8},2k\pi+\frac{7\pi}{8}](k\in\mathbf{Z})$

（D）$[k\pi+\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{7\pi}{8}](k\in\mathbf{Z})$

答案：A

解法 1：解析式中 x 的系数为负，习惯上一般先用诱导公式化负为正，可用 $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ 来化，

由题意，$f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=-\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，要求 $f(x)$ 的减区间，只需求 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的增区间，

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 可得：$k\pi-\frac{\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{3\pi}{8}$，故 $f(x)$ 的减区间是 $[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}](k\in\mathbf{Z})$.

解法 2：我们也可以用 $\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)$ 来将 x 的系数化负为正，

由题意，$f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=\sin[\pi-(\frac{\pi}{4}-2x)]=\sin(2x+\frac{3\pi}{4})$，

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{3\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ 可得：$k\pi-\frac{\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{3\pi}{8}$，故 $f(x)$ 的减区间是 $[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}](k\in\mathbf{Z})$.

5．（2022 · 银川模拟 · ★★）已知函数 $g(x)=\cos x+\sin x$，$h(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})+\sin(x+\pi)$，设 $f(x)=g(x-\frac{\pi}{6})h(x-\frac{\pi}{6})$，则 $f(x)$ 的单调递增区间是（　　）

（A）$[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}](k\in\mathbf{Z})$

（B）$[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$

（C）$[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$

（D）$[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}](k\in\mathbf{Z})$

答案：A

解析：先写出 $f(x)$ 的解析式并化简，由题意，$h(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})+\sin(x+\pi)=\cos x-\sin x$，

$f(x)=g(x-\frac{\pi}{6})h(x-\frac{\pi}{6})=[\cos(x-\frac{\pi}{6})+\sin(x-\frac{\pi}{6})][\cos(x-\frac{\pi}{6})-\sin(x-\frac{\pi}{6})]$

$=\cos^2(x-\frac{\pi}{6})-\sin^2(x-\frac{\pi}{6})=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$，

要求 $f(x)$ 的单调递增区间，可将 $2x-\frac{\pi}{3}$ 换元成 t，借助复合函数同增异减准则来分析，

令 $t=2x-\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=\cos t$，$y=f(x)$ 是由外层的 $y=\cos t$ 和内层的 $t=2x-\frac{\pi}{3}$ 复合而成，内层显然↗，故要求 $f(x)$ 的增区间，应先求外层 $y=\cos t$ 的增区间，

因为 $y=\cos t$ 的增区间是 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$，所以令 $2k\pi-\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi$ 可得：$k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6}$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}](k\in\mathbf{Z})$.

【反思】 函数 $y=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的单调递增区间应由不等式 $2k\pi-\pi\le\omega x+\varphi\le 2k\pi$ 来求，单调递减区间应由不等式 $2k\pi\le\omega x+\varphi\le 2k\pi+\pi$ 来求.

6．（★★★）（多选）已知函数 $f(x)=\tan(2x-\frac{\pi}{3})$，则下列说法正确的是（　　）

（A）函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

（B）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\ne\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\}$

（C）点 $(\frac{5\pi}{12},0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心

（D）$f(x)$ 的单调递增区间是 $(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3})(k\in\mathbf{Z})$

答案： ABC

解析： A 项，函数 $y=\tan(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{|\omega|}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{\pi}{2}$，故 A 项正确；

B 项，求正切的角不能是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍，可由此求定义域，由 $2x-\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ 可得 $x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}$，

所以 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\}$，故 B 项正确；

C 项，要判断 $(\frac{5\pi}{12},0)$ 是否为对称中心，就看当 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}$ 是否为 $\frac{\pi}{2}$ 的整数倍，

当 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}=2\times\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，故 C 项正确；

D 项，令 $k\pi-\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{3}<k\pi+\frac{\pi}{2}$ 可得 $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}<x<\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12})(k\in\mathbf{Z})$，故 D 项错误.

7.（2022 • 广东模拟 • ★★★）（多选）将函数 $f(x)=\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x+1$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，则（　　）

（A）$g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{9}$ 对称

（B）$g(x)$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{3}$

（C）$g(x)$ 的图象关于 $(\frac{11\pi}{18},1)$ 对称

（D）$g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{9}]$ 上单调递减

答案： BCD

解析： 由题意，$f(x)=\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x+1=2\sin(3x-\frac{\pi}{3})+1$，

$g(x)=f(x+\frac{\pi}{6})=2\sin[3(x+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{3}]+1=2\sin(3x+\frac{\pi}{6})+1$，

A 项，要判断 $x=\frac{5\pi}{9}$ 是否为对称轴，只需判断 $\frac{5\pi}{9}$ 是否为 $\sin(3x+\frac{\pi}{6})$ 的最值点，

当 $x=\frac{5\pi}{9}$ 时，$\sin(3\times\frac{5\pi}{9}+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sin(-\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}\neq\pm1\Rightarrow x=\frac{5\pi}{9}$ 不是 $g(x)$ 的对称轴，故 A 项错误；

B 项，$g(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{3}$，故 B 项正确；

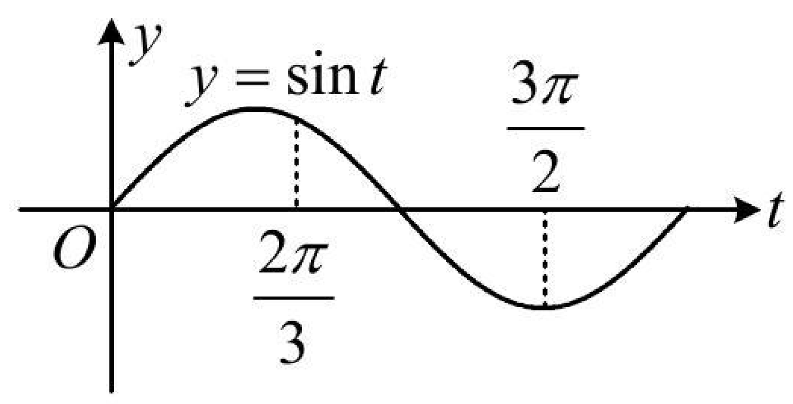
C 项，要判断 $(\frac{11\pi}{18},1)$ 是否为对称中心，只需判断 $\frac{11\pi}{18}$ 是否为 $\sin(3x+\frac{\pi}{6})$ 的零点，

当 $x=\frac{11\pi}{18}$ 时，$\sin(3\times\frac{11\pi}{18}+\frac{\pi}{6})=\sin 2\pi=0\Rightarrow(\frac{11\pi}{18},1)$ 是 $g(x)$ 图象的对称中心，故 C 项正确；

D 项，可将 $3x+\frac{\pi}{6}$ 换元成 t，转化为研究 $y=2\sin t+1$ 的单调性，因为 $y=2\sin t+1$ 与 $y=\sin t$ 的单调性相同，所以可画 $y=\sin t$ 的图象来看，

设 $t=3x+\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)=2\sin t+1$，当 $x\in[\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{9}]$ 时，$t\in[\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}]$，

如图，$y=\sin t$ 在 $[\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}]$ 上↘，所以 $g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{9}]$ 上↘，故 D 项正确.



类型 II：含参的单调性相关问题

8.（2022·浙江开学改·★★）函数 $f(x)=\cos(\omega x+\frac{3\pi}{4})(\omega>0)$ 在区间 $(0,1)$ 上不可能（　　）

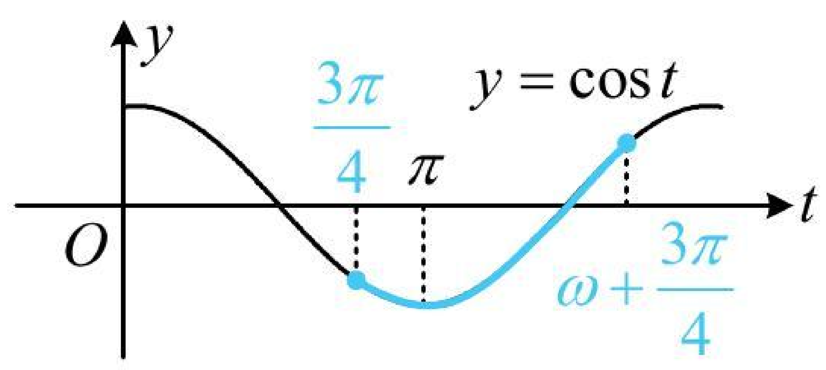
（A）有最大值　（B）有最小值　（C）单调递增　（D）单调递减

答案：C

解析：直接分析 $f(x)$ 的图象不方便，所以将 $\omega x+\frac{3\pi}{4}$ 换元成 t，借助 $y=\cos t$ 的图象来分析，

令 $t=\omega x+\frac{3\pi}{4}$，则 $f(x)=\cos t$，当 $x\in(0,1)$ 时，$t\in(\frac{3\pi}{4},\omega+\frac{3\pi}{4})$，函数 $y=\cos t$ 的部分图象如图所示，

由图可知 $y=\cos t$ 从 $t=\frac{3\pi}{4}$ 开始必定先↘，从而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上必定也要先↘，故 C 项错误.



9.（2022·江苏模拟改·★★★）若 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在 $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$ 上单调，则 ω 的取值范围为_____.

答案：$(0,1]$

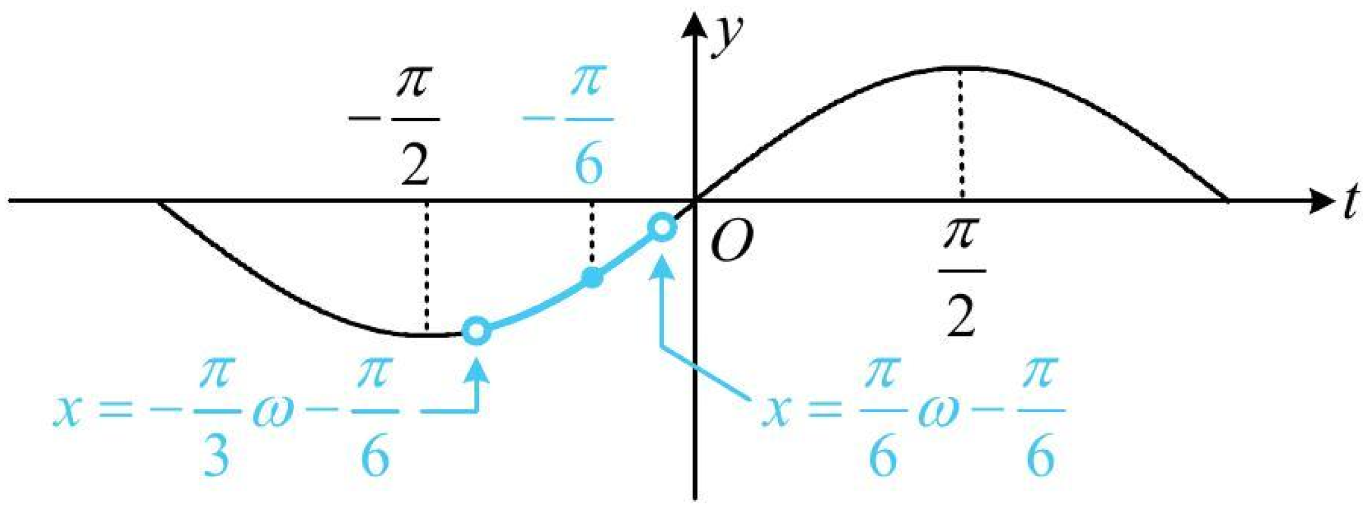
解析：先将 $\omega x-\frac{\pi}{6}$ 换元成 t，用 $y=\sin t$ 的图象研究问题，设 $t=\omega x-\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)=\sin t$，

当 $x\in(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$ 时，$t\in(-\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{6})$，问题等价于函数 $y=\sin t$ 在 $(-\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{6})$ 上单调，

该区间中必有 $-\frac{\pi}{6}$，如图，要使 $y=\sin t$ 在该区间单调，则该区间的左端点不能越过 $-\frac{\pi}{2}$，右端点不能越过

$\frac{\pi}{2}$，

所以$\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}\ge-\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$，结合$\omega>0$解得：$0<\omega\le1$.



10．（2023·广州模拟改·★★★★）已知函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<-\frac{\pi}{6})$，其图象上相邻的两个最高点之间的距离为$\pi$，$f(x)$在$[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{8}]$上是单调函数，则$\varphi$的最大值为_____.

答案：$-\frac{\pi}{4}$

解析：相邻的两个最高点之间的距离为$\pi\Rightarrow T=\pi$，所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，故$f(x)=\cos(2x+\varphi)$，

要分析$f(x)$在$[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{8}]$的单调性，可整体换元画图来看，

令$t=2x+\varphi$，则$f(x)=\cos t$，且当$x\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{8}]$时，$t\in[\frac{\pi}{6}+\varphi,\frac{\pi}{4}+\varphi]$，

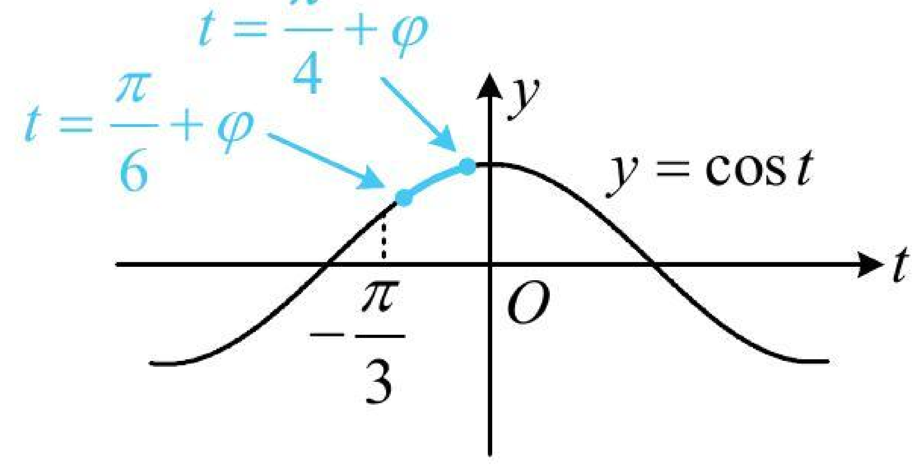
为了确定这段区间在图象上的位置，可结合φ的范围分析端点的范围，

因为$-\frac{\pi}{2}<\varphi<-\frac{\pi}{6}$，所以$-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}+\varphi<0$，

如图，左端点在$(-\frac{\pi}{3},0)$上，要使$y=\cos t$在$[\frac{\pi}{6}+\varphi,\frac{\pi}{4}+\varphi]$

上单调，则右端点不能到y轴右侧，

所以$\frac{\pi}{4}+\varphi\le0$，解得：$\varphi\le-\frac{\pi}{4}$，故$\varphi_{\max}=-\frac{\pi}{4}$.



【反思】和上一题比，本题区间$[\frac{\pi}{6}+\varphi,\frac{\pi}{4}+\varphi]$不过定点，故先研究端点的范围，找到区间的大致位置，再画图分析；另外，本题也可用例3变式4解法2的通法.

类型III：零点与极值点问题

11.（2022·南昌模拟·★★★）若函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在 $(0,\pi)$ 上恰有 1 个极大值点，无极小值点，则 ω 的取值范围为_____.

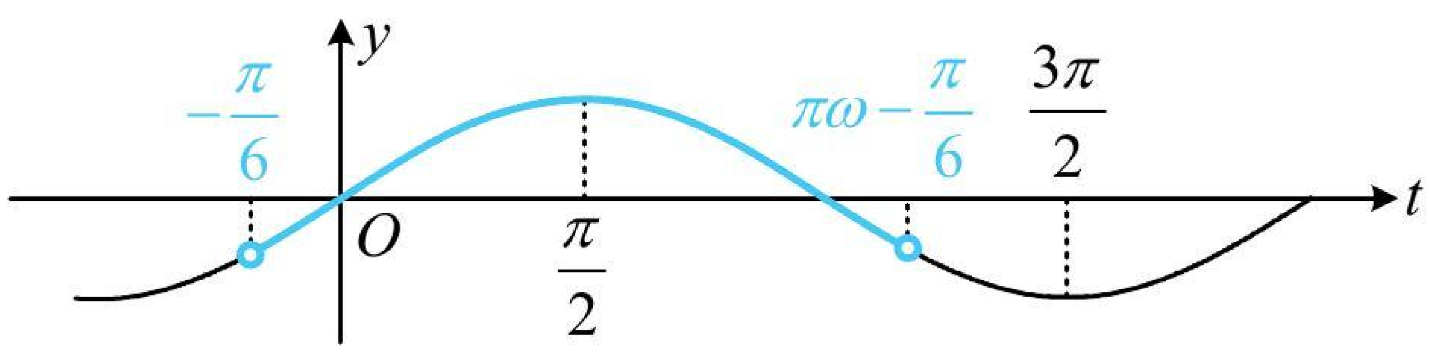
答案：$(\frac{2}{3},\frac{5}{3}]$

解析：先将 $\omega x-\frac{\pi}{6}$ 换元成 t，借助 $y=\sin t$ 的图象来分析问题，

设 $t=\omega x-\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)=\sin t$，当 $x\in(0,\pi)$ 时，$t\in(-\frac{\pi}{6},\pi\omega-\frac{\pi}{6})$，

所以问题等价于 $y=\sin t$ 在 $(-\frac{\pi}{6},\pi\omega-\frac{\pi}{6})$ 上有 1 个极大值点，无极小值点，

如图，右端点 $\pi\omega-\frac{\pi}{6}$ 应介于 $\frac{\pi}{2}$（不可取）和 $\frac{3\pi}{2}$（可取）之间，所以 $\frac{\pi}{2}<\pi\omega-\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}$，解得：$\frac{2}{3}<\omega\le\frac{5}{3}$.



12.（2022·全国甲卷·★★★）设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$ 在区间 $(0,\pi)$ 恰有三个极值点、两个零点，则实数 ω 的取值范围是（　　）

（A）$[\frac{5}{3},\frac{13}{6})$　　（B）$[\frac{5}{3},\frac{19}{6})$　　（C）$(\frac{13}{6},\frac{8}{3}]$　　（D）$(\frac{13}{6},\frac{19}{6}]$

答案：C

解析：本题没有规定 ω 的正负，但结合选项，可以只考虑 $\omega>0$ 的情形，但这里我们把 $\omega\le0$ 的情况也来做个分析，弄明白为什么 $\omega\le0$ 不满足题意，

当 $\omega=0$ 时，$f(x)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，显然不合题意；

当 $\omega<0$ 时，先将 $\omega x+\frac{\pi}{3}$ 换元成 t，利用 $y=\sin t$ 的图象来分析问题，

设 $t=\omega x+\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=\sin t$，当 $x\in(0,\pi)$ 时，$t\in(\pi\omega+\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$，如图 1，在 $y=\sin t$ 在 $(\pi\omega+\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ 上有 2 个零点的条件下，则极值点最多也只有 2 个，不可能满足题意；

当 $\omega>0$ 时，因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $t\in(\frac{\pi}{3},\pi\omega+\frac{\pi}{3})$，

函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 恰有三个极值点、两个零点 $\Leftrightarrow$ $y=\sin t$ 在 $(\frac{\pi}{3},\pi\omega+\frac{\pi}{3})$ 恰有三个极值点、两个零点，

如图 2，右端点 $\pi\omega+\frac{\pi}{3}$ 应介于 $\frac{5\pi}{2}$（不可取）和 3π（可取）之间，

所以 $\frac{5\pi}{2}<\pi\omega+\frac{\pi}{3}\le3\pi$，解得：$\frac{13}{6}<\omega\le\frac{8}{3}$，故实数 ω 的取值范围是 $(\frac{13}{6},\frac{8}{3}]$.

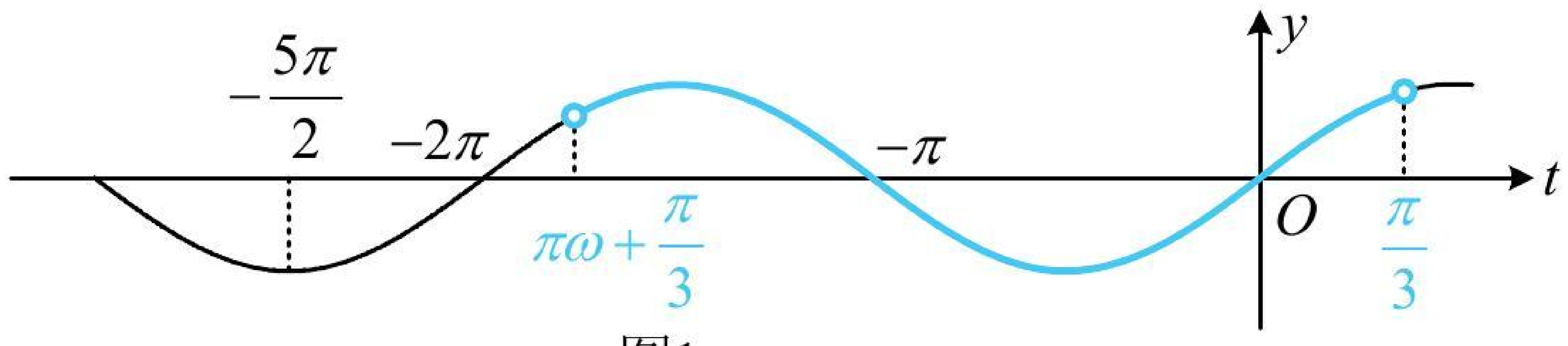


图1

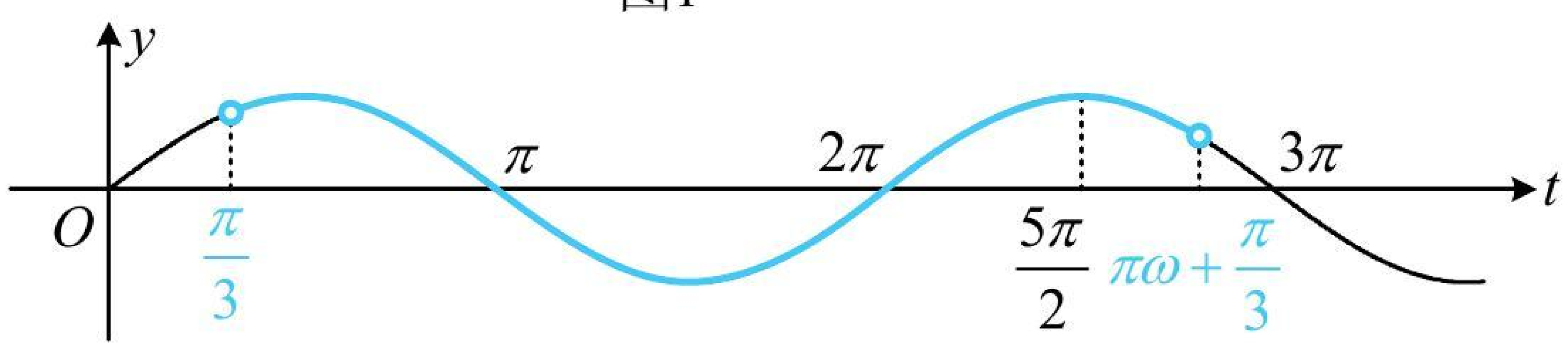


图2

13.（2022 • 安阳模拟 • ★★★）已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)-1(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的图象经过原点，且 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有且仅有一个零点，则 ω 的最大值为（　　）

（A）$\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）2　　（D）$\frac{13}{6}$

答案：C

解析：因为 $f(x)$ 的图象过原点，所以 $f(0)=2\cos\varphi-1=0$，故 $\cos\varphi=\frac{1}{2}$，

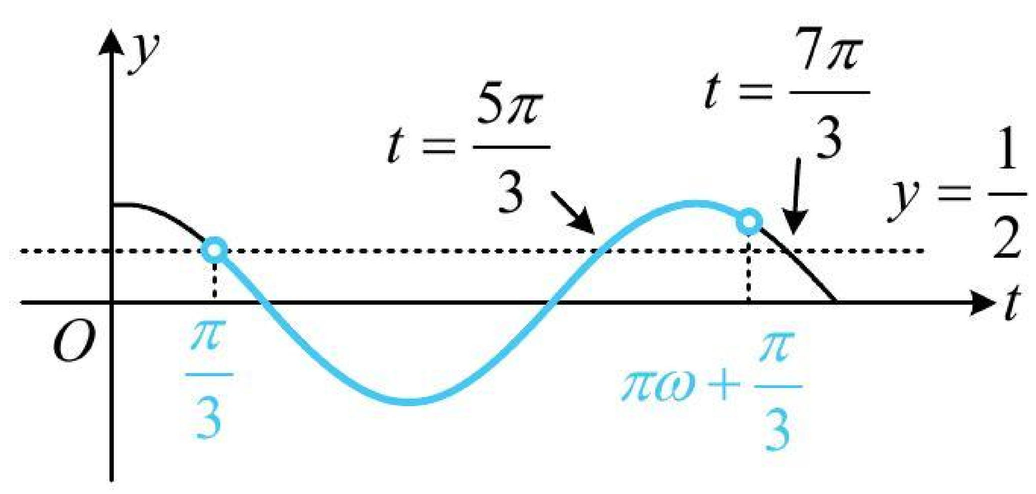
又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，故 $f(x)=2\cos(\omega x+\frac{\pi}{3})-1$，

要研究 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的零点，可将 $\omega x+\frac{\pi}{3}$ 换元成 t，借助 $y=\cos t$ 的图象来分析，

令 $t=\omega x+\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=2\cos t-1$，所以 $f(x)=0\Leftrightarrow\cos t=\frac{1}{2}$，当 $x\in(0,\pi)$ 时，$t\in(\frac{\pi}{3},\pi\omega+\frac{\pi}{3})$，

函数 $y=\cos t$ 的部分图象如图所示，要使方程 $\cos t=\frac{1}{2}$ 在 $(\frac{\pi}{3},\pi\omega+\frac{\pi}{3})$ 上有且仅有 1 个解，

应满足 $\frac{5\pi}{3}<\pi\omega+\frac{\pi}{3}\le\frac{7\pi}{3}$，解得：$\frac{4}{3}<\omega\le 2$，所以 $\omega_{\max}=2$.



类型Ⅳ：代值与条件综合翻译

14.（2022 • 全国乙卷 • ★★）记函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期为 T，若 $f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点，则 ω 的最小值为_____.

答案：3

解析：由题意，$T=\frac{2\pi}{\omega}$，$f(T)=\cos(\omega\cdot\frac{2\pi}{\omega}+\varphi)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，结合 $0<\varphi<\pi$ 可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

所以 $f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})$，又 $x=\frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点，所以 $f(\frac{\pi}{9})=\cos(\omega\cdot\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{6})=0$，

从而 $\omega\cdot\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，故 $\omega=9k+3(k\in\mathbf{Z})$，又 $\omega>0$，所以 ω 的最小值为 3.

15.（2022 • 新高考Ⅰ卷 • ★★★）记函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})+b(\omega>0)$ 的最小正周期为 T，若 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，且 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3\pi}{2},2)$ 中心对称，则 $f(\frac{\pi}{2})=$（　）

（A）1　（B）$\frac{3}{2}$　（C）$\frac{5}{2}$　（D）3

答案：A

解析：要求 $f(\frac{\pi}{2})$，应先求 ω 和 b，题干所给 T 的范围可翻译成 ω 的范围，

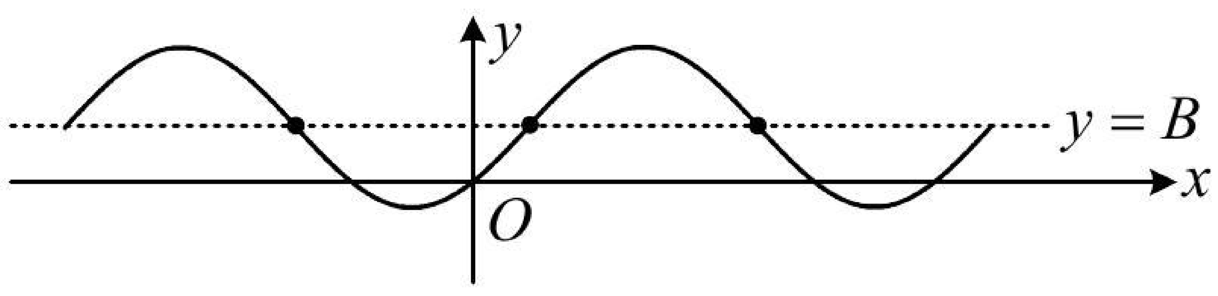
因为 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，所以 $\frac{2\pi}{3}<\frac{2\pi}{\omega}<\pi$，故 $2<\omega<3$，

函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3\pi}{2},2)$ 中心对称 $\Rightarrow b=2$，（函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的对称中心纵坐标是 B）

且 $\omega\cdot\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=k\pi$，所以 $\omega=\frac{2}{3}k-\frac{1}{6}(k\in\mathbf{Z})$，结合 $2<\omega<3$ 可得 $k=4$，$\omega=\frac{5}{2}$，故 $f(x)=\sin(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4})+2$，

所以 $f(\frac{\pi}{2})=\sin(\frac{5}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})+2=\sin\frac{3\pi}{2}+2=1$.

【反思】如图，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的对称中心就是图象上能使 $\sin(\omega x+\varphi)=0$ 的那些点，其横坐标可由 $\omega x+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 来求，纵坐标即为 B.



16.（2023 • 四川成都模拟 • ★★★）函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{3}$，其图象关于 $(\frac{\pi}{18},0)$ 对称，且当 $x\in[\frac{\pi}{6},m]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}]$，则 m 的取值范围为（　）

（A）$[\frac{\pi}{9},\frac{7\pi}{18}]$　（B）$[\frac{2\pi}{9},\frac{7\pi}{18}]$　（C）$[\frac{\pi}{9},\frac{5\pi}{18}]$　（D）$[\frac{2\pi}{9},\frac{5\pi}{18}]$

答案：D

解析：$T=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=3$，所以 $f(x)=\cos(3x+\varphi)$，

又 $f(x)$ 关于 $(\frac{\pi}{18},0)$ 对称，所以 $3\times\frac{\pi}{18}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，

故 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，结合 $0<\varphi<\pi$ 可得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

所以 $f(x)=\cos(3x+\frac{\pi}{3})$，

要分析 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},m]$ 上的值域，可将 $3x+\frac{\pi}{3}$ 换元成 t，借助 $y=\cos t$ 的图象来研究，

设 $t=3x+\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=\cos t$，且当 $x\in[\frac{\pi}{6},m]$时，

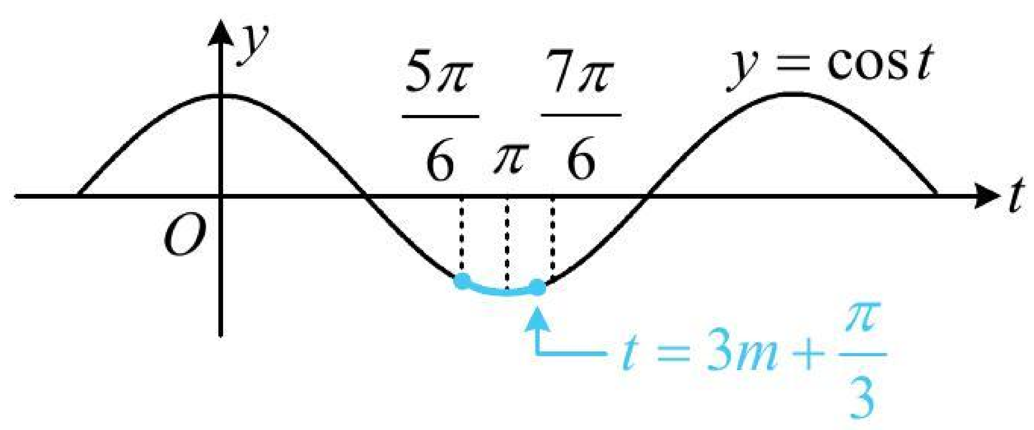
$t\in[\frac{5\pi}{6},3m+\frac{\pi}{3}]$，函数 $y=\cos t$ 的大致图象如图，

注意到 $\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以要使 $y=\cos t$ 在

$[\frac{5\pi}{6},3m+\frac{\pi}{3}]$上的值域为$[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}]$，

应有右端点 $3m+\frac{\pi}{3}$ 只能在 π 和 $\frac{7\pi}{6}$ 之间，

即 $\pi\le 3m+\frac{\pi}{3}\le\frac{7\pi}{6}$，解得：$\frac{2\pi}{9}\le m\le\frac{5\pi}{18}$.



17.（2022·河南模拟·★★★）已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6\omega}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 是奇函数，$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{6})$ 上单调递增，则 ω 的最大值为（　　）

（A）$\frac{2}{3}$　（B）1　（C）2　（D）3

答案：C

解析：由题意，$g(x)=f(x-\frac{\pi}{6\omega})=2\sin[\omega(x-\frac{\pi}{6\omega})+\varphi]=2\sin(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6})$，

因为 $g(x)$ 为奇函数，所以 $g(0)=2\sin(\varphi-\frac{\pi}{6})=0$，从而 $\sin(\varphi-\frac{\pi}{6})=0$，故 $\varphi-\frac{\pi}{6}=k\pi$，

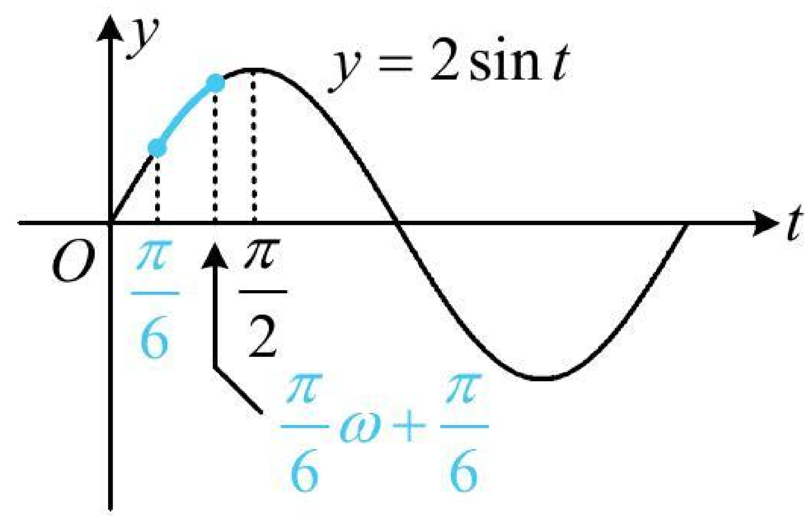
所以 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故 $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$，

要研究 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{6})$ 上的单调性，可将 $\omega x+\frac{\pi}{6}$ 换元成 t，借助 $y=2\sin t$ 的图象来分析，

令 $t=\omega x+\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)=2\sin t$，当 $x\in(0,\frac{\pi}{6})$时，$t\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6})$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{6})$ 上↗等价于 $y=2\sin t$ 在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6})$ 上↗，如图，

由图可知，应有 $\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}$，结合 $\omega>0$ 可得 $0<\omega\le 2$，故 $\omega_{\max}=2$.



18.（2023•四省联考•★★★★）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 单调，其中 ω 为正整数，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，且 $f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{2\pi}{3})$.

（1）求 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴；

（2）若 $f(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 φ.

解：（1）（已有函数值相等条件，看看它们是否在一个周期内，即可确定中间是否为对称轴）

因为 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 上单调，所以 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\le\frac{T}{2}$，故 $T\ge\frac{2\pi}{3}$，（这就说明 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$ 在一个周期内）

又 $f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{2\pi}{3})$，所以 $x=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3})=\frac{7\pi}{12}$ 为 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴.

（2）由（1）知 $T\ge\frac{2\pi}{3}$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}\le 3$，结合 $\omega\in\mathbf{N}^*$ 可得 ω 只可能取 1，2，3，

（故接下来可讨论 ω，由于我们要求 φ，于是先把（1）中的对称轴条件翻译出来，建立关于 φ 的方程）

因为 $x=\frac{7\pi}{12}$ 是 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴，所以 $\omega\cdot\frac{7\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ ①，

若 $\omega=1$，则由①可得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{12}$，结合 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ 可得 $\varphi=-\frac{\pi}{12}$，

所以 $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{12})$，此时 $f(\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{12}\ne\frac{\sqrt{3}}{2}$，不合题意；

若 $\omega=2$，则由①可得 $\varphi=k\pi-\frac{2\pi}{3}$，结合 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ 可得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，此时 $f(\frac{\pi}{6})=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

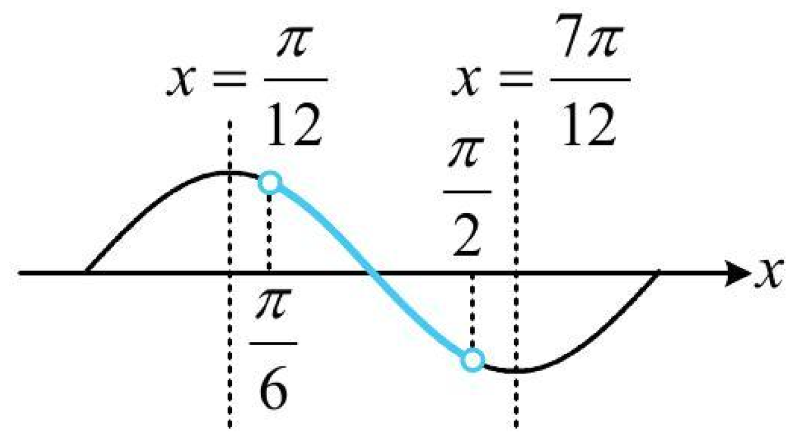
且 $T=\pi$，所以对称轴 $x=\frac{7\pi}{12}$ 左侧相邻的对称轴为 $x=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}$，故 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12})$ 上单调，（如图）

因为 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})\subseteq(\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12})$，所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 上单调，满足题意；

若 $\omega=3$，则由①可得 $\varphi=k\pi-\frac{5\pi}{4}$，结合 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ 可得 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，

所以 $f(x)=\sin(3x-\frac{\pi}{4})$，此时 $f(\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{4}\ne\frac{\sqrt{3}}{2}$，不合题意；

综上所述，φ 的值为 $\frac{\pi}{3}$.



【反思】本题的核心也是翻译每一个条件，例如在某区间单调、对称轴、特定点的函数值等，这些条件可以翻译成关于 ω 或 φ 的方程或不等式. 回顾本节练习可发现，诸多三角函数图象性质的考题，都是通过翻译条件得到思路.